4色問題の伝統的証明

この論文は4色問題の伝統的証明の試みである。

(1)グラフ化

n個の国からなる平面（球面を含む）上の地図を点と線からなるグラフとする。国を点、国境を2点を結ぶ線で表現する。飛び地は別の国として扱う。国と国とが点接触している箇所は国境としない。2か国が複数個所で接している場合は一か所を境界とする。線は異なる2点を結ぶ。線の両端が同じ一つの点になることはない。線の両端2点は異なる色又は色記号をつける。点や線は相互に又は自身に重ならない。任意の2点間に複数本の線はない。線を枝と呼ぶことがある。辺と呼ぶこともある。線は実線で描く。つながってない2点を点線で結ぶ（非連結線と呼ぶ）場合がある。

(2)飽和グラフ

平面上で点相互に交差しない線を可能な限り引いたグラフを飽和グラフと呼ぶ。【図１】
飽和グラフは平面をすべて3点3辺からなる3角形に分割する。n個の点からなる完全グラフの線は「n(n-1)/2」本、飽和グラフの線は「3n-6」本である。飽和グラフで引けない線（非連結線）は完全グラフの線数から飽和グラフの線数を引いて「(n-3)(n-4)/2」本である。飽和グラフの3角形は「2n-4」個である。
本論文では5か国5点以上の地図又はグラフについて考える。
飽和グラフの色分けに必要な色の数は4か5である。色記号はA,B,C,Dの4つとし、5色目が必要な場合はEとする。A色の国や点はa0,a1,a2,…、B色の国や点はb0,b1,b2,…とし、C色、D色も同様とする。E色の点はe0とする。

(3)5色グラフ発生と特徴

m本の枝がある点をm枝点と呼ぶ。
n個以下の点からなる飽和グラフは全て4色で塗り分けできるとし、点を一つずつ増やし、n+1個の点からなるグラフで5色必要になったとする。その場合、最初に発生するE色の点は1点e0である。そのときのグラフの様子は次の①～④のとおりである。

①飽和グラフである。
　飽和グラフでない場合、つまり、n+1個の点からなる非飽和グラフの場合、4角形以上の多角形が少なくとも一つある。その多角形で向かいあった2点を合体すると点数がn+1未満となり4色で塗り分けできる。例えば、飽和グラフから線を1本抜いた非飽和グラフは、抜いた線の両側にあった3角形2個が4角形1個になり、その4角形で向かい合ったいずれかの2点を合体することでn個の点のグラフになり塗分けが4色で済み、2点の合体を元に戻しても4色のままとなる。

②3枝点や4枝点はなく、すべて5枝以上の点からなる。
　3枝点がある場合、その3枝点と3枝を抜けばn点飽和グラフとして4色であり、抜いた点と枝を戻しても4色でよい。
　4枝点がある場合、4枝点とその4枝点を中心として向かい合った2点を合体することで、n点の飽和グラフとして4色で塗り分けできる。その合体を戻しても4色で済む。

③5枝点は一つ以上存在する。
　3枝点や4枝点がなくすべて5枝以上の点からなる飽和グラフには少なくとも一つ以上の5枝点がある。

④E色の点は一つである。
　点を一つずつ増やしたn+1点の飽和グラフで5色必要なグラフが出現したとする。その場合、最後に追加した1点e0を第5色Eとする。ここで、最後に追加した点としたが、その飽和グラフを見た場合、どの点も最後に追加した点とみなすことができる。

(4)点e0

n+1点の飽和グラフでE色の1点eが出現するとした場合、その飽和グラフの点はどれでもe0になりえるが、本論文ではいずれかの5枝点一つをe0とする。
つまり、いずれかの5枝点を最後に追加したn+1個目の点とみなす。そのn+1個目の1点e0のみ第5色Eとする。
e0は少なくとも異なる4色A～Dの4点a0、b0、c0、d0に4枝L1～L4で接続しなけれ

ばならない。e0以外の点は全てA～Dの4色で塗り分けされる。

(5)色域と空域
平面上に飽和グラフの点や線と重ならない5色に対応した5つの仮想的な閉じた領域を設けて5色に対応させる。【図２】その領域を色域（しきいき）と呼び、A色に対応した色域はA色域と呼ぶ。B、C、D、E色も同様とする。
色域は同色の点を集める仮想領域である。なお、第5色Eの点e0は点を増やす途中で出現するとしても出現の最初は一点だけなので色域の範囲を示す絵は省くことがある。
色域は重ならない。色域には穴はなく、穴に別の色域が入ることはない。色域は自己とは接触しない。色域は他の色域と接合することがある。【図３】
色域を除く平面上の領域は空域と呼ぶ。空域Sは切れ目なく一つである。

(6)点の移動
最初、点や線は全て空域に存在する。それらの点を動かし、各色域に同色の点を集める。点の移動は空域から色域への一方通行である。点は空域と色域の境界を一度だけ通過する。つまり点自身の色に対応した目的の色域に直接入れ、他の色の色域は通過しない。そのためには点のある空域と目的の色域が接していなければならない。本論文では色域の接合は任意の2つの色域が1箇所で接してる形しか考えない。なので全ての色域は必ず空域に接している。
移動した点は色域の内側に入れ、他の色域や空域との境界線上には置かない。理由は次のとおり。
①境界線上に置くと次の点を入れるのに邪魔になるし、図が複雑になる。【図４】
②色域と色域を接合する場合、点が接合した境界線上にあると、どちらの色域に属するか分からない。【図５】

(7)線の巻き込み
目的の色域への点の移動は、その点とその点の枝と動線上に存在する他の線を巻き込む。【図６】【図７】
点は他の点に衝突せずに避けて通るが、他の点に繋がっている線を避けて通るわけにはいかない（ことが多い）。
点を移動させる順番と通り道の選択により、巻き込まれた線が色域に収納される収納構造【図８】は変わるが、グラフ全体の接続構造は変わらない。
空域は全ての色域と境界で接していて、空域から色域に点を移動させる順番によって残りの点が目的の色域に入れられなくなることはない。
色域に入って定着した点はその位置にとどまり、空域に出たり他の色域に行くことはない。つまり、入ったその位置から移動させる必要はない。
新たに色域に移動させる点が既に色域内に入っている点を押し出したり、色域から線を巻き出すことはない。
なお、点の移動は他の点qの枝を押して色域に押し込むことがあるが、他の点qを押し動かす必要はない。点は他の点や線の動きで動かされない。目的の色域に入った点はそこにとどまる。押されて曲がったり伸びたりするのは枝だけである。枝の長さは決まっていない。

(8)分置グラフ
点をそれぞれの色域に入れたグラフを分置グラフと呼ぶ。分置グラフでは次のようなことが観察される。
(1)分置グラフには他の色域を通過したように見える点がありえる。その点の枝が他の点の移動に巻き込まれることによる。【図９】
(2)分置グラフを見ると、点の移動ではなく、各色域内で点と線を生成して、生成した点から異なる色域の点に枝を伸ばしたものとみなすことができる。
そのようにしてグラフを生成したとみても、点や線を生成する順番が特定のルールに制約されるわけではない。

(9)地図とグラフを重ねる
2か国が境界で接している地図に、その地図を点と線で表現したグラフを重ねる。それを観察すると、点はそれぞれの国土の中にあり、国土の外に出す必要はない。2点を結ぶ線も2か国の国土から外に出る必要はない。国土をそれぞれの色の色域とみれば、2つの色域が接合しているとみなすことができる。
地図にグラフが貼りついていると考えると、地図の国土を変形することでグラフの線形を変えることができる。例えば曲がっている特定の線を直線にすることができる。変形させてもグラフの接続構造は変わらない。【図１０】

(10)ケンペ鎖

異なる2色が付与された国土又は点が交互に連なった部分地図や部分グラフはケンペ鎖と呼ばれる。異なる2色の任意の2国又は2点を選択した場合、その2国又は2点の間にその2色のケンペ鎖が存在するか存在しないかいずれかである。存在する場合は複数のルートがあることもありえる。複数ルートが存在する場合、一つのルートRを選び、それを構成する国の国土をそれぞれの色の色域の一部とみなし、全体の国土を切り分け直して2色の色域が接合した色域を作ることができる。【図１１】～【図１４】
するとそのルートR上の点や線という要素はすべてその接合させた色域内に入れておくことができ、接合した色域外に出す必要はない。その2色の色域は接合していても、それぞれ空域と接しているから、空域に残っている点を各色域に入れることに支障はない。
ケンペ鎖で使われている2色を交換することを色交換と呼ぶ。色交換は選んだルートRだけではなく、2色の繋がりが及ぶところまで及ぶ。

(11)第5の色Eの点e0の発生
点の増加で第5の色Eの点が発生したとする。その時のグラフでは色Eの点はe0だけであり、e0は他の4色の点に繋がらなければならない。そのグラフの部分構造として【図１５】【図１６】のような部分グラフがなければならない。

(12)グラフの内外反転
ここでe0を中心としてグラフの内外を反転する。その図を反転図と呼ぶ。e0を色Eの壁とし、e0の枝は壁から出る。【図１７】
壁に囲まれた中にA～D色に対応した4つの色域を設ける。点e0が色Eであるためには、e0から出た枝L1～L4の先端の点a0、b0、c0、d0はそれぞれ異なる4色域になければならない。
4つの色域に入れられた点はそれぞれ他の色域の点に線で結ばれるが、e0から見て隣あった色域にある点相互の接続は考えない。隣あう色域の点は当然異なる色であり、線で繋がっていてもいなくてもよいとして無視する。考えるべきは、向かいあった色域にある点相互の接続である。
反転図では、L1～L4の根元に東西南北の方位をつけ、壁を北東、南東、北西、南西の4区画に分ける。

(13)ケンペ鎖の有無
反転図において、向かいあった2つの色域にまたがるa0～b0間又はc0～d0間にケンペ鎖が存在しない（又は作らない）場合と存在する（又は作る）場合を分けて考える。

①a0～b0、c0～d0、の両方にケンペ鎖がない場合【図１８】
a0、b0、c0、d0はL1～L4でe0に直結する。e0は5枝点なのでL5がある。L5の一端aiがA色域にある場合、他端は対向するB色域側の北東又は南東の壁e0に直結しなければならない。
そこでA色域とB色域の点はそのままの色とし、c0又はd0に繋がるC-D色のどちらかのケンペ鎖でC-D色の色交換を行い、c0とd0を同色にする。
これにより壁e0に直結した点の色は3色A、B、C(又はD)となり、壁e0は色EでなくC又はD色に変えられる。
L5の一端がB、C、D色域のいずれかにある場合も同様である。

②a0～b0又はc0～d0にケンペ鎖がある場合
a0～b0とc0～d0のケンペ鎖は同時には存在できない。ここでa0～b0にケンペ鎖があるとする。2点間のケンペ鎖が存在する場合、線の分岐と合流により1ルートだけとは限らない。その場合は1つのルートRを選択する。
e0に直結するa0、b0、c0、d0に対応する4か国の国土を4つの色域とみなす。
次にルートRのA色域とB色域を接合し、接合した色域の領域を切り分けなおす。すると、R上の点と線は全て接合した色域の中に入れておける。
L5の在り方は次の２通りである。

②-1　L5がRと並行する場合【図１９】
L5の一端がA色域のai点の場合、L5は北東又は南東の壁に直結する必要がある。A色域はRとrで上下２つに区切られている。Rとrは横切れないから、aiが上下どちらにあるかで、直結先が北東か南東か決まる。
c0～d0はケンペ鎖がなく、c0(又はd0)が含まれるC-D色のケンペ鎖で色交換すると、e0に直結した点は3色(A、B、D(又はC)色)になるのでe0をC色(又はD色)にすることができる。
L5がB色域から出る場合も同様である。

②-2　L5がRとクロスしようとする場合【図２０】
L5の一端がC色域のci点の場合、L5は南東又は南西の壁に直結する必要があるが、a0～b0のRやrに阻止され到達できない。d0を含むC-D色のケンペ鎖で色交換を行いd0をC色に変更すればe0に直結した点は3色(A、B、C色)になるので、e0をD色にすることができる。
L5がD色域から出る場合も同様である。

(14)線の直線剛体化と色域極小化
ところが、ここで次のようなことが考えられる。

①C色域が伸びてRの延長にあるb0～e0の線rを超え、舌先にL5の一端ciが含まれる場合【図２１】
②b0～r0の線が伸びC色域を分断し、舌先にL5の一端ciが含まれる場合【図２２】

どちらもrを越えた色域に点を発生させた形である。
これは点と線からなるグラフで考えていることが原因で、暗黙のうちに①色域の形状も大きさも自由、②線は自由に伸びるし曲がる、としたことによる。

（なお、a0、b0がe0に直接接してrがないとした場合【図２３】、色域と色域は接合することはあっても重なることはないから、色域Cと色域Dは、色域Aと色域Bの接合体で完全に遮断される。また、Rが色域Aと色域Bの接合体の外に出すこともない。これにより上記①や②の問題は発生しない。）

上記①と②この問題は、次の２条件を設定することで解決できる。
　第１条件　色域を極小とすること
　第２条件　L1～L4を直線剛体とすること

第１条件として、色域を極小化する。色域どうしは重ねないし、L1～L4のうち他の色域に行く線と重なるほど大きくしない。極小化しても面積があれば点はいくらでも入れることができるから大きくしなければならない必要性はない。

第２条件として、L1～L4を直線剛体化する。L1～L4の一端はe0に集まり、L1～L4は重ならないからそれぞれ角度を保って十字のような放射状になる。L1～L4が曲がって他の色域を通過することはない。
このL1～L4とe0、a0、b0、c0、d0とからなる十字状の部分グラフを核と呼ぶ。【図２４】【図１６】
e0のL1～L4はそれぞれ目的の色域に行き、他の色域に行く必要はない。しかし、L5は隣の色域ではなく、一つ隔てたいずれかの色域に行かなければならない。そのためには曲がらなければならない。
L1～L4のみを直線剛体とし、他の線(L5を含む)は全て柔軟で曲がるし伸びるとする。そのようにしてもグラフの接続構造を変える必要はない。
この条件でもcjからの線がd0の根元の左右のいずれかの壁（東南又は西南）に到達しなければいけない。しかし、Rやrの存在によってそれは不可能であり、到達可能なのは北東と北西の壁だけである。L5はRやrに並行するしかない。

５色必要なグラフが存在する又は作れるなら、これら２条件を与えた上でも５色を必要とするグラフが描けるはずである。しかし、それは上記のとおり可能ではない。5色必要な核は発生しない。
以上により、5色必要なグラフ又は地図は平面上に描けない。

(14)国土の変形
なお、L1～L4の直線剛体化は次のようにも説明できる。
e0、a0、b0、c0、d0、L1～L4からなる部分グラフをそれらに対応した部分地図に重ねる。その部分地図と部分グラフが粘着しているとすると、部分地図を変形することで粘着したグラフを変形させ曲線を直線化させることができる。
そのように変形させても国と国との接続構造が変わるわけではない。
直線剛体化させるのはe0に直結した4枝L1～L4である。それ以外の線(e0に繋がったL5とその他の線)は自由に曲がるとしている。
e0、a0、b0、c0、d0、L1～L4をまとめて核と呼んだ。グラフ全体からみると、核は局所的な存在である。n+1点目で発生するとしても複数ではなく一つだけなのでL1～L4が曲がらないことで新たな問題は起きない。核はごく単純なもので直観的に分かる。核という考え方を取り入れてもグラフの接続構造に影響しないことは明らかである。